

15. IFT2015 Structures de données: Liste détaillée de sujets¹

¹ Detailed List of Subjects for the Final Examination — English translation starts on Page 10

Introduction

LE BUT DE CE DOCUMENT est de définir les compétences et connaissances requises dans le cours IFT2015 à l'examen final. L'examen constitue également la deuxième partie de l'examen pré-doctorale en structures de données.

- ◆ La connaissance des sujets marqués par ★ est exigée pour un «B/A-». Les sujets marqués par ★★ correspondent plutôt à un niveau «A+/A».
- ★ Les notes marginales sont des références aux ouvrages suivants
 - S Sedgewick, R. *Algorithmes en Java*, 3^e édition (2004)
 - SW Sedgewick, R. et K. Wayne. *Algorithms*, 4^e édition (2011)
- ★ Les notes de cours et des liens vers des articles Wikipedia sont affichés sur le site <http://ift2015a16.wordpress.com/>.
- ★ Aucune documentation ne sera permise à l'examen final.



Principes d'analyse d'algorithmes

Références

- ▷ Sedgewick chapitre 2
- ▷ Sedgewick & Wayne §1.4²
- ▷ Notes sur les fondations : [notes01-recursion.pdf](#).
- ▷ Notes sur l'analyse d'algorithmes : [notes04-analysis.pdf](#).

² <http://algs4.cs.princeton.edu/14analysis/>

Sujets

- ★ Principes de base : pire cas, meilleur cas, moyen cas.
- ★ Croissance de fonctions communes : constantes, logarithmiques, polynomiales, exponentielles. Factorielle($n!$), approximation de Stirling³ nombres Fibonacci⁴, nombres harmoniques⁵, logarithme itéré.
- ★ Notation asymptotique⁶ : définitions de grand $O(f)$, petit $o(f)$, $\Theta(f)$ et $\Omega(f)$.

Asymptotiques exactes $f \sim g$. Expressions avec $O()$ ou $o()$, règles d'arithmétique : $O(f) + O(g)$, $O(f) \cdot O(g)$. Relations avec la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c > 0 \quad \Rightarrow \quad f(n) = O(g(n));$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(n) = o(g(n));$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad f(n) \sim g(n)$$

- ★ Application de la définition pour démontrer $f = O(g)$ ou $f = o(g)$.
- ★ Détermination du temps de calcul et d'usage de mémoire pour algorithmes (itératifs) simples, et pour algorithmes récursifs (comme expression récursive).
- ★ Récurrences simples.

$$f(n) = f(n-1) + O(1) \quad f(n) = O(n);$$

$$f(n) = f(n/2) + O(1) \quad f(n) = O(\log n);$$

$$f(n) = 2f(n/2) + O(1) \quad f(n) = O(n);$$

$$f(n) = 2f(n/2) + O(n) \quad f(n) = O(n \log n);$$

- ★★ Preuve par induction pour récurrences asymptotiques.
- ★ Notion de temps amorti.
- ★★ Preuves de résultats sur le coût amorti d'opérations. Principe d'analyse crédit/débit⁷.
- ★ Validation expérimentale de temps de calcul

S§2.1,2.2,2.7

S§2.3

³ $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

⁴ $F_0 = 0; F_1 = 1; F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \{n > 1\}$

⁵ $H_n = \sum_{i=1}^n 1/i = \ln n + \gamma + o(1)$

⁶ [W\(fr\):comparaison asymptotique](#)

S§2.4

S§2.5.2.6

⁷ [W\(en\):accounting method](#)

*Structures élémentaires et types abstraits**Références*

- ▷ Sedgewick chapitres 3 et 4
- ▷ Sedgewick & Wayne §1.1⁸, §1.2⁹, §1.3¹⁰
- ▷ Notes sur la liste chaînée : [notes02-linkedlist.pdf](#).
- ▷ Notes sur les tableaux : [notes03-tableaux.pdf](#).

⁸ <http://algs4.cs.princeton.edu/11model/>⁹ <http://algs4.cs.princeton.edu/12oop/>¹⁰ <http://algs4.cs.princeton.edu/13stacks/>*Sujets*

- ★ Blocs de construction pour programmes Java.
- ★ Notions de type abstrait, interface, implantation, client.
- ★ Types abstraits de files généralisées, piles et queues/files FIFO.
- ★ Listes chaînées¹¹. Variations : listes circulaires, doublement chaînées. Sentinelles¹² pour la tête et/ou la queue. Manipulation d'éléments sur la liste, insertion et suppression. Parcours d'une liste.
- ★ Tableaux¹³.
- ★ Implantations de pile et de queue par tableaux ou listes chaînées. Efficacité d'implantations différentes (temps de calcul pour les opérations standardes). Débordement.

S§3.1;SW§1.1

S§4.1;SW§1.2

S§4.2.4.7

¹¹ W_(fr):liste chaînée

S§3.3.3.4

¹² W_(en):sentinel¹³ W_(fr):tableau

S§3.2

S§4.4.4.5,4.7;SW§1.3

*Tableaux de hachage**Références*

- ▷ Sedgewick chapitre 14
- ▷ Sedgewick & Wayne §3.4¹⁴, §3.5¹⁵.
- ▷ Notes sur le hachage : [notes06-hashing.pdf](#).

¹⁴ <http://algs4.cs.princeton.edu/34hash/>¹⁵ <http://algs4.cs.princeton.edu/35applications/>*Sujets*

- ★ Notions de base pour tableaux de hachage¹⁶ : facteur de charge/remplissage, collisions. S§14.1
¹⁶ W_(#):table de hachage
- ★ Fonctions de hachage : méthodes de la division et de la multiplication.
- ★ Résolution de collisions par chaînage séparé. Coût moyen des opérations de l'interface (table de symboles) en fonction de la facteur de charge. S§14.2
- ★ Addressage ouvert : notion de sondage/test. Procédures de recherche et d'insertion avec addressage ouvert. Suppression paresseuse et hachage dynamique. Sondage linéaire, grappe forte. Double hachage. S§14.3–14.6

*Appartenance-union**Références*

- ▷ Sedgewick §1.2–1.3
- ▷ Sedgewick & Wayne §1.5¹⁷
- ▷ Notes sur Union-Find : [notes07-unionfind.pdf](#).

¹⁷ <http://algs4.cs.princeton.edu/15uf/>*Sujets*

- ★ Problème de connexité, opérations d'appartenance-union. S§1.2
- ★ Structure Union-Find¹⁸. Astuces : union-par-rang/union-par-taille, compression de chemin. S§1.3;SW§1.5
¹⁸ W_(#):union-find
- ★★ Coût amorti d'opérations : $O(\alpha(m, n))$ pour Union-Find avec union équilibrée et compression de chemin ; fonction d'Ackermann¹⁹ et son inverse. ¹⁹ W_(#):fonction d'Ackermann

*Arbres**Références*

- ▷ Sedgewick §4.3, §5.4–5.7
- ▷ Notes sur les arbres : [notes08-trees.pdf](#).

Sujets

- ★ Terminologie pour structures arborescentes : arbre k -aire, hauteur, niveau, profondeur. Implémentation d'un arbre. S§5.4
- ★ Propriétés d'arbres binaires (relations entre le nombre de nœuds internes et externes ou la hauteur). S§5.5
- ★ Parcours d'un arbre : préfixe/préordre, infixé/dans l'ordre, postfixé/postordre, ordre de niveau. S§5.6
- ★ Arbre syntaxique. Conversions d'expressions arithmétiques : notations infixé, postfixé et préfixé. S§4.3
- ★ Algorithmes récursifs sur les arbres : calcul de taille, hauteur ou profondeur de sous-arbres. S§5.7

*File de priorité**Références*

- ▷ Sedgewick §9.1–9.6
 - ▷ Sedgewick & Wayne §2.4²⁰
 - ▷ Notes sur la file de priorité : [notes09-heap.pdf](#).
- ²⁰ <http://algs4.cs.princeton.edu/24pq/>

Sujets

- ★ Type abstrait de file de priorité²¹ min-tas/max-tas : opérations `insert`, `deleteMin` ou `deleteMax`. Implantations par tableau ou liste chaînée. S§9.1,9.5
²¹ [W_{\(en\)}:priority queue](#)
- ★ Arbre en ordre de tas²². Manipulation du tas : nager et couler (heapification montante et descendante). Tas binaire²³, sa représentation dans un tableau. S§9.2,9.3;SW§2.4
²² [W_{\(fr\)}:tas](#)
²³ [W_{\(fr\)}:tas binaire](#)
- ★ `heapify` (établissement de l'ordre de tas dans un tableau) ; tri par tas²⁴, son temps de calcul et usage de mémoire. S§9.4
²⁴ [W_{\(fr\)}:tri par tas](#)
- ★★ Tas d -aire²⁵. [W_{\(en\)}:d-ary heap](#)
²⁵

*Méthodes de tri**Références*

- ▷ Sedgewick §6.1–6.4, §6.6, §6.9; chapitres 7, 8.
- ▷ Sedgewick & Wayne §2.1²⁶, §2.2²⁷, §2.3²⁸.
- ▷ Notes sur les tris : [notes10-tris.pdf](#).
- ▷ Notes sur le tri rapide : [notes11-quicksort.pdf](#).

²⁶ <http://algs4.cs.princeton.edu/21elementary/>

²⁷ <http://algs4.cs.princeton.edu/22mergesort/>

²⁸ <http://algs4.cs.princeton.edu/23quicksort/>

Sujets

- ★ Terminologie : tri interne et externe.
- ★ Tri par sélection²⁹ et tri par insertion³⁰.
- ★ Performances des tris élémentaires (pire cas, meilleur cas, cas moyen).
- ★ Fusion de tableaux.
- ★ Tri par fusion³¹ (descendant), sa performance.
- ★ Tri rapide³² : algorithme de base. Améliorations : partition par la médiane-de-trois, petits sous-fichiers.
- ★ Génération d'une permutation aléatoire
- ★ Performances du tri rapide (pire cas, meilleur cas, cas moyen)
- ★★ Preuve de la performance moyenne $O(n \log n)$ du tri rapide.
- ★ Preuve de la borne inférieure $\lg(n!)$ sur le nombre de comparaisons au pire pour trier

S§6.1

S§6.3,6.4; SW§2.1

²⁹ W_(tr):tri par sélection

³⁰ W_(tr):tri par insertion

S§6.6

S§8.1

S§8.3,8.4; SW§2.2

³¹ W_(tr):tri fusion

³² W_(tr):tri rapide

S§7.1,7.4,7.5; SW§2.3

S§7.2,7.3; SW 2.3

SW§2.2

*Arbres binaires de recherche**Références*

- ▷ Sedgewick chapitres 12, §13.1, §13.3, §13.4
- ▷ Sedgewick & Wayne §3.1³³, §3.2³⁴, §3.3³⁵.
- ▷ Notes sur l'arbre binaire de recherche : [notes12-abr.pdf](#).
- ▷ Notes sur l'arbre rouge et noir : [notes13-rn.pdf](#).

³³ <http://algs4.cs.princeton.edu/31elementary/>

³⁴ <http://algs4.cs.princeton.edu/32bst/>

³⁵ <http://algs4.cs.princeton.edu/33balanced>

Sujets

- ★ Type abstrait de la table de symboles. S§12.1,12.2
- ★ Recherche séquentielle et recherche binaire. S§12.3–12.5
- ★ Arbre binaire de recherche³⁶. Procédures fondamentales sur un ABR : recherche, insertion, suppression. Recherche de minimum ou maximum, successeur ou prédécesseur. ³⁶ W_(fr):ABR S§12.6–12.9
- ★ Performance moyenne des opérations sur un ABR standard avec clés aléatoires. S§13.1
- ★ Notion d'un ABR équilibré. Maintenance d'équilibre : rotations simples et doubles.
- ★ ABR rouge et noir³⁷. Définition par rang (hauteur noire) ou coloriage ; équivalence des deux définitions. Coût des opérations dans le pire cas. ³⁷ W_(fr):arbre bicolore S§13.4
- ★★ Hauteur maximale d'un arbre rouge et noir.
- ★ Techniques de base sur les ABR rouges et noirs : promotion/rétrogradation, changement de couleur, rotation. Déroulement général d'une insertion ou suppression.
- ★★ Déroulement détaillé de l'insertion et de la suppression.
- ★ Les arbres 2-3-4³⁸, et leur équivalence avec les arbres rouges et noirs. Techniques de base sur les arbres 2-3-4 : décalage et découpage, leur relation aux rotations et promotions. ³⁸ W_(en):2-3-4 tree S§13.3

*Algorithmes sur graphes**Références*

- ▷ Sedgewick §3.7 ; Sedgewick & Wayne §4.1³⁹, §4.3⁴⁰
- ▷ Notes sur l'arbre couvrant minimal : [notes14-acm.pdf](#).

³⁹ <http://algs4.cs.princeton.edu/41graph/>⁴⁰ <http://algs4.cs.princeton.edu/43mst/>*Sujets*

- ★ Représentation d'un graphe : matrice d'adjacence et listes d'adjacence⁴¹.
- ★ Notion d'un arbre couvrant minimal⁴². Principe de base des algorithmes : la règle bleue. Logique générale des algorithmes de Prim⁴³ et de Kruskal⁴⁴, choix de structures de données.
- ★★ Analyse détaillé du temps de calcul des algorithmes. Choix de tas dans l'algorithme de Prim.

S§3.7;SW§4.1

⁴¹ W_(en):adjacency list⁴² W_(fr):ACM

SW§4.3

⁴³ W_(fr):algorithme de Prim⁴⁴ W_(fr):algorithme de Kruskal



Introduction

THIS DOCUMENT defines the skills and knowledge for the final examination in IFT2015, which is also the second part of the *examen pré-doctoral* in data structures.

- ◆ Topics for a «B/A-» level are denoted by *; ** denote somewhat more advanced topics for «A+/A» level.
- ★ The margin notes refer to the following books :
 - S Sedgewick, R. *Algorithms in Java*, Parts 1–4, 3rd edition (2003)
 - SW Sedgewick, R. et K. Wayne. *Algorithms*, 4th edition (2011)
- ★ The class notes and links to Wikipedia articles are available on the webpage <http://ift2015a16.wordpress.com/>.
- ★ No documentation is allowed at the examen.



*Principles of algorithm analysis**References*

- ▷ Sedgewick chapter 2
- ▷ Sedgewick & Wayne §1.4⁴⁵
- ▷ Notes on the foundations: [notes01-recursion.pdf](#).
- ▷ Notes on algorithm analysis: [notes04-analysis.pdf](#).

⁴⁵ <http://algs4.cs.princeton.edu/14analysis/>*Topics*

- ★ Basic principles : worst case, best case, average case.
- ★ Growth of common functions : constants, logarithms, polynomials, exponentials. Factorial ($n!$), Stirling's formula⁴⁶, Fibonacci numbers⁴⁷, harmonic numbers⁴⁸, iterated logarithm
- ★ Asymptotic notation⁴⁹ : definitions of big-Oh $O(f)$, small-oh $o(f)$, $\Theta(f)$, and $\Omega(f)$. Arithmetic expressions involving asymptotics, rules : $O(f) + O(g)$, $O(f) \cdot O(g)$. Connections to \lim

S§2.1,2.2,2.7

S§2.3

⁴⁶ $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

⁴⁷ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

⁴⁸ $H_n = \sum_{i=1}^n 1/i = \ln n + \gamma + o(1)$

⁴⁹ W(en):big-O notation

S§2.4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c > 0 \quad \Rightarrow \quad f(n) = O(g(n));$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(n) = o(g(n));$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad f(n) \sim g(n)$$

- ★ Using the definitions to prove $f = O(g)$ or $f = o(g)$.
- ★ Determination of space and time complexity for simple (iterative) algorithms, and for recursive algorithms (as a recursive expression).
- ★ Basic recurrences.

S§2.5.2.6

$$f(n) = f(n-1) + O(1) \quad f(n) = O(n);$$

$$f(n) = f(n-1) + O(n) \quad f(n) = O(n^2);$$

$$f(n) = f(n/2) + O(1) \quad f(n) = O(\log n);$$

$$f(n) = f(n/2) + O(n) \quad f(n) = O(n);$$

$$f(n) = 2f(n/2) + O(1) \quad f(n) = O(n);$$

$$f(n) = 2f(n/2) + O(n) \quad f(n) = O(n \log n);$$

- ★★ Proof by induction for asymptotic recurrences.
- ★ Notion of amortized cost.
- ★★ Proving amortized cost. Credit/debit method.
- ★ Experimental validation of running time

*Elementary structures and abstract data types**References*

- ▷ Sedgewick chapters 3 et 4
- ▷ Sedgewick & Wayne §1.1⁵⁰, §1.2⁵¹, §1.3⁵²
- ▷ Notes on linked lists: [notes02-linkedlist.pdf](#).
- ▷ Notes on tables: [notes03-tableaux.pdf](#).

⁵⁰ <http://algs4.cs.princeton.edu/11model/>

⁵¹ <http://algs4.cs.princeton.edu/12oop/>

⁵² <http://algs4.cs.princeton.edu/13stacks/>

Topics

- ★ Java building blocks.
- ★ Concept of an abstract data type, interface, implementation, client.
- ★ Abstract types for stacks, queues and generalized queues,
- ★ Linked lists⁵³. Variations : circular, doubly-linked lists. Sentinels⁵⁴ for head and/or tail. Manipulation of elements, insertion and deletion. List traversal.
- ★ Arrays⁵⁵.
- ★ Implementations of stack and queue by tables or linked lists. Running time for standard operations in different implementations. Overflow/underflow.

S§3.1;SW§1.1

S§4.1;SW§1.2

S§4.2.4.7

⁵³ W_(en):linked list

S§3.3.3.4

⁵⁴ W_(en):sentinel

⁵⁵ W_(en):array

S§3.2

S§4.4.4.5.4.7;SW§1.3

Hash tables

Reference

- ▷ Sedgwick chapter 14.
- ▷ Sedgwick & Wayne §3.4⁵⁶, §3.5⁵⁷.
- ▷ Notes on hashing: [notes06-hashing.pdf](#).

⁵⁶ <http://algs4.cs.princeton.edu/34hash/>

⁵⁷ <http://algs4.cs.princeton.edu/35applications/>

Topics

- ★ Basic notions for hashtables⁵⁸ : load factor, collisions. S§14.1
- ★ Hash functions : division and multiplication methods. ⁵⁸ W_(en):[hashtable](#)
- ★ Collision resolution by separate chaining. Average-case performance with separate chaining as function of the load factor. S§14.2
- ★ Open addressing : probe sequence. Search and insertion with open addressing. Lazy deletion, dynamic hashing. Linear probing, primary clustering. Double hashing. S§14.3–14.6

Union-find

References

- ▷ Sedgwick §1.2–1.3
- ▷ Sedgwick & Wayne §1.5⁵⁹
- ▷ Notes on Union-Find: [notes07-unionfind.pdf](#).

⁵⁹ <http://algs4.cs.princeton.edu/15uf/>

Topics

- ★ Connectivity problems, union-find operations. S§1.2
- ★ Union-Find⁶⁰ data structure. Techniques : union-by-rank/union-by-size, path compression. ⁶⁰ W_(en):[union-find](#)
S§1.3;SW§1.5
- ★★ Amortized cost per operation : $O(\alpha(m, n))$ for Union-Find with balanced trees and path compression ; Ackermann⁶¹ function and its inverse. ⁶¹ W_(en):[Ackermann function](#)

*Trees**References*

- ▷ Sedgwick §4.3, §5.4–5.7
- ▷ Notes on trees: [notes08-trees.pdf](#).

Topics

- ★ Terminology for tree structures : k -ary tree, height, level, depth. Tree implementations. S§5.4
- ★ Mathematical properties of binary trees (relationships between number of internal and external nodes, height) S§5.5
- ★ Tree traversal : preorder, inorder, postorder, level-order. S§5.6
- ★ Syntax tree. Conversion between arithmetic notations : infix, prefix and postfix. S§4.3
- ★ Recursions on trees : computing the size, height, or depth of subtrees. S§5.7

*Priority queues**References*

- ▷ Sedgwick §9.1–9.6
- ▷ Sedgwick & Wayne §2.4⁶²
- ▷ Notes on priority queues: [notes09-heap.pdf](#).

⁶² <http://algs4.cs.princeton.edu/24pq/>

Topics

- ★ ADT for priority queue⁶³ : operations insert, deleteMin or deleteMax. Implementations by table or linked list. S§9.1.9.5
⁶³ W_(en):priority queue
- ★ Heap⁶⁴ order for a tree. Heap manipulation : swim and sink. Binary heap⁶⁵, its representation in a table. S§9.2.9.3;SW§2.4
⁶⁴ W_(en):heap
- ★ heapify (linear-time construction of heap order in a table) ; Heapsort⁶⁶, its running time and memory. S§9.4
⁶⁵ W_(en):binary heap
- ★★ d -ary heap⁶⁷. ⁶⁶ W_(en):heapsort
⁶⁷ W_(en): d -ary heap

*Sorting algorithms**References*

- ▷ Sedgewick §6.1–6.4, §6.6, §6.9; chapters 7, 8.
- ▷ Sedgewick & Wayne §2.1⁶⁸, §2.2⁶⁹, §2.3⁷⁰.
- ▷ Notes on elementary sorting algorithms: [notes10-tris.pdf](#).
- ▷ Notes on quicksort: [notes11-quicksort.pdf](#).

⁶⁸ <http://algs4.cs.princeton.edu/21elementary/>

⁶⁹ <http://algs4.cs.princeton.edu/22mergesort/>

⁷⁰ <http://algs4.cs.princeton.edu/23quicksort/>

Topics

- ★ Terminology : stable sort, internal and external sort.
- ★ Insertion⁷¹ sort and selection⁷² sort.
- ★ Performance of elementary sorting algorithms (worst case, best case, average case).
- ★ Merging arrays.
- ★ Mergesort⁷³ (top-down), its performance.
- ★ Quicksort⁷⁴ : basic algorithm. Improvements : pivoting by median-of-three, small subarrays.
- ★ Performance of quicksort (worst case, best case, average case).
- ★ Generating a random permutation
- ★★ Proof of $O(n \log n)$ average running time for quicksort.
- ★ Proof of the lower bound $\lg(n!)$ for the worst-case number of comparisons

S§6.1

⁷¹ W_(en):insertion sort

⁷² W_(en):selection sort

S§6.3,6.4; SW §2.1

S§6.6

S§8.1

⁷³ W_(en):merge sort

S§8.3,8.4; SW§2.2

⁷⁴ W_(en):quicksort

S§7.1,7.4,7.5; SW§2.3

S§7.2,7.3

SW§2.2

*Binary search trees**Reference*

- ▷ Sedgwick chapters 12, §13.1, §13.3 and §13.4
- ▷ Sedgwick & Wayne §3.1⁷⁵, §3.2⁷⁶, §3.3⁷⁷.
- ▷ Notes on binary search trees: [notes12-abr.pdf](#).
- ▷ Notes on red-black trees: [notes13-rn.pdf](#).

⁷⁵ <http://algs4.cs.princeton.edu/31elementary/>

⁷⁶ <http://algs4.cs.princeton.edu/32bst/>

⁷⁷ <http://algs4.cs.princeton.edu/33balanced>

Topics

- ★ Abstract data type of symbol table.
- ★ Sequential and binary search.
- ★ Binary search tree⁷⁸. Basic techniques : search, insertion, deletion. Searching for minimum or maximum, successor or predecessor.
- ★ Average performance of a standard BST with random keys.
- ★ Notion of a balanced BST. Maintaining the balance : simple and double rotations.
- ★ Red-black tree⁷⁹. Definition by rank (black height) or coloring ; equivalence of the two definitions. Time complexity for operations in the worst-case.
- ★★ Maximum height of a red-black tree.
- ★ Basic techniques for red-black trees : promotion/demotion, recoloring, rotations. General outline of insertion and deletion.
- ★★ Detailed (case-by-case) steps in insertion and deletion.
- ★ 2-3-4 tree⁸⁰, its equivalence with the red-black tree. Basic techniques with 2-3-4 trees : shifting and splitting, relationship with promotions and rotations in red-black tree.

S§12.1,12.2

S§12.3-12.5

⁷⁸ W_(en):BST

S§12.6-12.9

S§13.1

⁷⁹ W_(en):red-black tree

S§13.4

⁸⁰ W_(en):2-3-4 tree

S§13.3

*Graph algorithms**References*

- ▷ Sedgwick §3.7
- ▷ Sedgwick & Wayne §4.1⁸¹, §4.3⁸²
- ▷ Notes on minimum spanning tree and shortest path: [notes14-acm.pdf](#).

⁸¹ <http://algs4.cs.princeton.edu/41graph/>⁸² <http://algs4.cs.princeton.edu/43mst/>*Topics*

- ★ Graph representations by adjacency matrix and adjacency lists⁸³.
- ★ Concept of a minimal spanning tree⁸⁴ (MST). Basic principles of MST algorithms : the blue rule (adding minimum-weight edge in a cut). General logic of Kruskal's⁸⁵ and Prim's⁸⁶ algorithms, choice of data structures. Basic justification for $O(n \log n)$ and $O(m \log n)$ running times (n nodes, m edges).
- ★★ Detailed analysis of running time for Kruskal's and Prim's algorithms. Choice of heap in Prim's algorithm.

S§3.7;SW§4.1

⁸³ W_(en):adjacency list⁸⁴ W_(en):MST

SW§4.3

⁸⁵ W_(en):Kruskal's algorithm⁸⁶ W_(en):Prim's algorithm